Las LÚNULAS cuadrables DE HIPÓCRATES DE QUÍOS

CONRADO RUIZ HERNÁNDEZ

Primero quise
verle tres pies al gato,

luego seguí con
encontrarle la
cuadratura congruente
al número pi.

Hoy mismo no sé,
después de lo buscado,
qué más intentar.

Pero aprendí:
es mejor avocarse
a lo concreto.

Todo objeto de estudio se puede constituir en la búsqueda de una cuadratura, pero ninguna ha resultado ser tan extrema como la del círculo, en la que se concentra el afán por encontrar –con más ilusión que razón– un área circular exactamente correspondiente con el área de un cuadrado; inquietud intelectual que no parece haber tenido una finalidad práctica, no obstante haber surgido hace cerca de cuatro mil años, entre los matemáticos babilonios y egipcios.

El investigador moderno, conocedor de las dificultades en el abordaje de asuntos cuya demanda de exactitud es absoluta, ya aprendió la lección –al menos eso se espera– de detectar lo que sí está en posibilidad de asir con sus manos y, sobre todo, con la mente.

La cuadratura del círculo es un problema clásico, cuyo planteamiento y solución posible se enmarca en el ideal de la sistematización deductiva (el método axiomático que es un enfoque o abordaje primordial en la historia del pensamiento científico).[1] Las reglas para intentar su resolución fueron establecidas por el geómetra griego Hipócrates de Quíos (470-400 a. C.).

Este sofista logró demostrar la igualación exacta entre las áreas de una figura curvilínea (lúnula) con otra rectilínea (triángulo recto isósceles), lo que se establece en la versión sintética del teorema siguiente:[2] "Siendo el cuadrante *A* igual al semicírculo *B*; entonces –descontando en ambos el área común– las áreas restantes son iguales" (ver figura 1). Luego entonces, de acuerdo con lo que se aprecia en la demostración original de Hipócrates de Quíos, el área de una sola lúnula se *cuadra* con el área de un triángulo, así las cuatro lúnulas –cada una construida en su cuadrante respectivo– se igualan efectivamente con un cuadrado.[3] El modismo lingüístico *buscar la cuadratura* es sinónimo de igualar dos entidades (con aplicaciones rutinarias diversas), siendo célebre la búsqueda milenaria de la cuadratura del círculo que, como está comprobado, es una imposibilidad matemática,[4] esto se debe al carácter trascendente* del número π y a que es indemostrable (con probabilidad = 0) la igualación exacta de las áreas implicadas, tanto para su construcción intencional como para su comprobación después de elaboradas.[5]

CUADRATURA EMBLEMÁTICA

Las argumentaciones axiomáticas se suceden en un contexto de situaciones geométricas ideales (verdades evidentes, figuras perfectas, relaciones exactas, etcétera), además de que las comprobaciones se realizan por deducción, sin que sea necesario hacer mediciones o cálculos (aunque no hay restricción alguna para hacerlos en caso necesario). Los trazos deben realizarse preferentemente empleando una regla sin graduación y compás. La cuadratura de lúnulas que realizó Hipócrates de Quíos constituye, en el campo de la geometría plana, el único caso reconocido de igualación exacta, de las áreas de una sección circular con una figura recti-

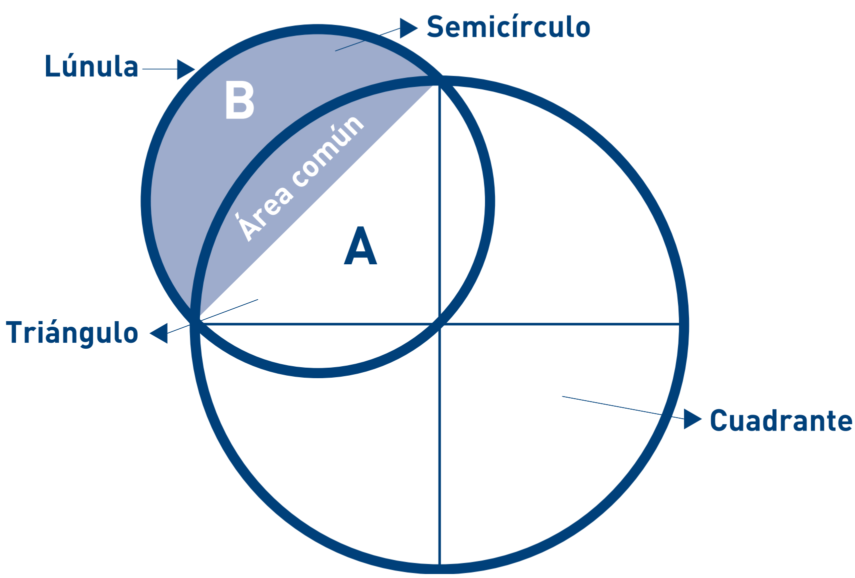

Figura 1.
"Siendo el cuadrante *A* igual al semicírculo *B*; entonces -descontando en ambos el área común- las áreas restantes son iguales". De este modo se asegura la igualación exacta del semicírculo con el cuadrante y de la lúnula con el triángulo.

* Cualidad de ciertos números irracionales consistente en que su raíz cuadrada no puede ser una solución en ecuaciones como ésta: $a^2 - 2 = 0$. Aquí la solución es: $a = \sqrt{2}$, lo que sí es posible, ya que la $\sqrt{2}$ constituye un número irracional algebraico; es decir, no trascendente. Con la raíz cuadrada de π eso no es posible. Esta letra griega (pi) se utiliza desde el siglo XVIII para aludir al cociente: circunferencia/diámetro = 3.14159...

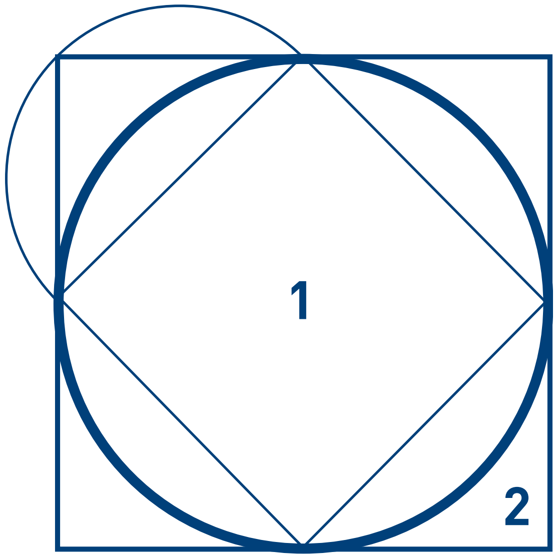

Figura 2.
Origen de la relación 2 a 1 en la cuadratura de lúnulas o meniscos; cuatro de estas lúnulas -dibujadas en su cuadrante respectivo- se igualan con el área del cuadrado inscrito (el que se encuentra en el interior).

línea. Su demostración se fundamenta en la relación que guardan dos círculos con dependencia estructural entre sí, uno de ellos con un área igual al doble de la del otro, lo que hace del planteamiento una demostración matemática sumamente ventajosa y prácticamente predeterminada. Todo es cuidar que las relaciones geométricas implicadas mantengan la proporción 2 a 1 (ver la figura 2), por lo que el área de dos círculos pequeños (en las dos figuras sólo aparece uno) es igual al área del grande, el área circular del primero se iguala con la del semicírculo del segundo y, consecuentemente, el área de la mitad del círculo chico (semicírculo) es exactamente igual a la que tiene un cuadrante del círculo grande.

Tratándose de dos áreas iguales, al retirar de ambas una parte común delimitada por las intersecciones de los trazos, las restantes siguen conservando la igualdad. Con todas estas ventajas y la gran sencillez de su planteamiento, este alarde de perfección geométrica es un caso *sine qua non*.

Sin embargo, intentar asemejar esta misma situación –como por ejemplo en la búsqueda de la cuadratura del círculo– francamente es una trampa en la que han caído un gran número de matemáticos y diletantes (aficionados). No obstante, y a pesar de ser una imposibilidad matemática, lo que realmente se conoce con certeza desde fines del siglo XIX, es que la búsqueda de la cuadratura del círculo está implicada en el desarrollo de la teoría de los números y con la invención de los cálculos diferencial e integral. Dicho de otra manera, esta pesquisa sí tuvo provecho para el desarrollo del conocimiento matemático, aunque en el presente ya no sea sino un objeto de interés anecdótico.

UNA COMPROBACIÓN QUE NO ESTÁ DE MÁS

¿Cómo saber realmente que el círculo grande tiene un área igual al doble de la del círculo chico en la cuadratura de estas lúnulas? Si la respuesta se intenta a través del cálculo, se corre el riesgo de que al aparecer un valor numérico irracional, el resultado sea imperfecto; es decir, que el círculo chico tenga un área no exactamente? por una diferencia infinitesimal? igual a la mitad del círculo grande. Entonces, el mejor camino para su demostración deberá ser un desarrollo algebraico (el preferido por los matemáticos griegos aunque, en esa época, era propiamente geométrico).

El punto de partida, para verificar la proporción que guardan entre sí los dos círculos, es tomar como patrón la longitud del diámetro perteneciente al círculo grande (recuérdese que radio = diámetro/2 y que el área circular = π x radio^2). De aquí que el área de éste sea: [π x (diámetro/2)^2] = [π x (diámetro^2/4)]. Asimismo, el área del círculo chico es:

$$[\pi \times (\sqrt{2}(\text{diámetro}2/4) \times 1/2] = [\pi \times 2(\text{diámetro}2/16)]$$

Así se puede comprobar las veces que contiene el área del círculo grande a la del chico: $[\pi \times (\text{diámetro}^2/4)] / [\pi \times 2(\text{diámetro}^2/16)]$. Por reducción algebraica (con la supresión de las dos π y los dos diámetros al cuadrado, tanto en el dividendo como en el divisor), finalmente el resultado es: $(1/4) / (2/16) = 2$. Como queda demostrado.

Nótese cómo lo tratado en esta demostración, en la que confluyen diferentes aspectos matemáticos de manera integral, puede adaptarse como un ejercicio didáctico apropiado en el nivel de enseñanza secundaria. Para esto conviene repasar previamente con los alumnos sus bases de geometría, álgebra, potencias, raíces y operaciones con fracciones (quebrados). Un reto interesante es calcular el valor exacto de las áreas del triángulo recto isósceles y de la lúnula. Una pista:

Corresponden a la misma porción del cuadrado más grande que aparece en la figura 2

RAZONAMIENTO PREVENTIVO

Una reflexión conveniente para buscadores de cuadraturas como la del círculo y de otras –apremio que en el argot matemático se conoce como *el morbo ciclo-métrico*[6]– es que analicen con todo rigor el razonamiento preventivo siguiente: "En la búsqueda de toda cuadratura geométrica, con una sola fuente de incertidumbre insalvable, la igualdad pretendida es indemostrable". En la actualidad se ensayan modelos con orientación tecnócrata, inspirados principalmente en la teoría de juegos (campo en donde se vinculan las matemáticas, la economía y la administración), que pretenden resumir en ecuaciones a la realidad humana con la finalidad de predecir el comportamiento social y económico.[7] ¿Acaso serán estos modelos otras cuadraturas temerarias y mucho más complicadas que la del círculo?

REFERENCIAS

1. Losee, J., *Introducción histórica a la filosofía de la ciencia*, Alianza Universidad, Madrid, 1981.
2. Morales, L., "La cuadratura del círculo y otros problemas de geometría", *Ciencias*, Facultad de Ciencias-UNAM, Núm. 65, Enero-Marzo de 2002, pp. 54-65.
3. Carrega, J., *Théorie des corps. La règle et le compas*, Hermann, París, 1981.
4. Berggren, L., Borwein, J., Borwein, P., *Pi: a source book*, Springer, Nueva York, 1997.
5. Ruiz, H. C., "Convertibilidad del círculo en cuadrilátero", *Ciencia y Desarrollo,* Conacyt, Vol. XXVII, Núm. 159, Julio-Agosto de 2001, pp. 46-51.
6. Ruiz, H. C., "Un área cuadrada próxima a π", *Ciencias,* Facultad de Ciencias-UNAM, Núm. 73, Enero-Marzo de 2004, pp. 64-72.
7. Mankiewicz, R., *Historia de las matemáticas. Del cálculo al caos*, Paidós, Barcelona, 2000.